

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.

En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.

En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.

On considère les événements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement $S \cap G$ puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,695.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service?
5. Les événements S et G sont-ils indépendants? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
 - a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres? Justifier.
 - b. Calculer $P(X \leq 18)$.
 - c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées?
 - d. Déterminer l'espérance de X .
2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.

On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

- a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n .
- b. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n , $P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$.
- c. En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75; 0,95 [$ avec une probabilité supérieure à 0,9.